TEORIA MATEMATICAS 5

PRIMER PARCIAL

Def: "*Grafica de una función*"

Sea $f: U\subset R^n \rightarrow R$. Definimos la grafica de f como el subconjunto de R^{n+1} formado por los puntos $((x_1 \dots x_n), (f(x_1 \dots x_n))$ de R^{n+1} en los que $(x_1 \dots x_n)$ es un punto de U. Simbólicamente grafica es:

$$f: \left\{ \left((x_1 \dots x_n), \left(f(x_1 \dots x_n) \right) \right) \in R^{n+1} / (x_1 \dots x_n) \in U \right\}$$

Def. "*Curvas y superficies de nivel*"

Sea $f: U\subset R^n \rightarrow R$ y sea $c \in R$. Entonces, el conjunto del nivel de valor c se define como el conjunto de los puntos $x \in U$ en los cuales $f(x) = c$. Si $n = 2$, hablaremos de curvas de nivel (de valor c); y si $n = 3$, hablaremos de superficie de nivel. Con símbolos, el conjunto de nivel de valor c se escribe.

$$\{x \in U \ / f(x) = c\}\subset R^n$$

LÍMITES Y CONTINUIDAD.

Definición CONJUNTOS ABIERTOS.

Se define disco abierto (o bola abierta) de radio r y centro x_0 como el conjunto de puntos c tales que $\|x - x_0\| < r$

Def. Conjunto abierto

Sea $U\subset R^n$ (es decir se U un conjunto de R^n). Llamamos a U conjunto abierto si para todo punto x_0 en U existe $r > 0$ tal que $Dr(x_0)$ esta contenido dentro de U.

Teorema:

Para todo $x_o \in R^n$ y para todo r$r > 0$; $Dr(x_0)$ es conjunto abierto.

FRONTERA

Def: *Punto Frontera*

Sea $A\subset R^n$ .Un punto $x \in R^n$ se llama punto frontera de A si todo entorno de x contiene un punto de A y al menos un punto que no esta en A.

LIMITES.

Def. *Limites*

Sea $f: A \subset R^n \rightarrow R^m$, donde A es un conjunto abierto. Sea x_0 un punto de A o un punto frontera de A y sea N un entorno de $b \in R^m$. Decimos que f finaliza en N cuando c tiende a x_0, si existe un entorno U de x_0 tal que $x \neq x_0$, $x \in U \; y \; x \in A$ implica $f(x) \in N$. Decimos que f(x) tiende a b cuando x tiende a x_0.

Propiedades:

Teorema: UNICIDAD

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = b_1 \quad y \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = b_2 \quad ; \quad b_1 = b_2$$

Teorema:

$i.- \lim_{x \to x_0} c.f(x) = c. \lim_{x \to x_0} f(x)$

$ii.- \lim_{x \to x_0} (f \pm g)(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$

FUNCION CONTINUA.

Def: Sea $f: A \subset R^n \rightarrow R^m$ una función dada con dominio A. Sea $x_0 \in A$. Decimos que f es continua en x_0 si y solamente si

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Teorema: *Propiedades de las funciones continúas.*

$$f: A \subset R^n \rightarrow R^m \qquad\qquad g: A \subset R^n \rightarrow R^m \quad y\ sea\ c \in R$$

$i. -Si\ f\ es\ continua\ en\ x_0\ tambien\ cf$

$ii. -Si\ f\ y\ g\ son\ continuas\ en\ x_0\ tambien\ lo\ es\ f \pm g$

Teorema: Sea $g: A \subset R^n \rightarrow R^m$ y sea $f: B \subset R^m \rightarrow R^p$. Supongamos que $g(A) \subset B$ de forma que fog está definida en A. Si g es continua en $x_0 \in A$ y f es continua en $y_0 = g(x_0)$ entonces fog es continua en x_0.

LIMITE EN TERMINO DE $\boldsymbol{\varepsilon}$ $\boldsymbol{Y}$ $\boldsymbol{\delta}$

Teorema: Sea $f: A \subset R^n \rightarrow R^m$ y sea x_0 un punto frontera de A. Entonces $\lim_{x \to x_0} f(x) = b$ si y solamente si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in A$ que satisface

$0 < \|x - x_0\| < \delta$ se tiene que $\|f(x) - b\| < \varepsilon$.

DIFERENCIACION.

Def: Sea $U\complement R^n$ un conjunto abierto y supóngase que $f: A\complement R^n \to R$ es una función con valores reales. Entonces $\frac{\partial f}{\partial x}$, … … , $\frac{\partial f}{\partial x_n}$, las derivada parciales de f respectos de la primera, segunda, ……, n-esima variables, son las funciones con valores de n variables, en el punto $(x_1, \dots, x_n) = x$, se define como

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_n) = \lim_{h\to 0} \frac{\left(f\left(x_1, x_2, \dots, x_j + h, \dots, x_h\right) - f(x_1, \dots, x_n)\right)}{h}$$

PLANO TANGENTE.

Def: Sea $f: R^2 \to R$ diferenciable en $x_0 = (x_0, y_0)$. El plano de R^3 definido por la ecuación

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Se llama plano tangente de la grafica de f en el punto (x_0, y_0).

DIFERENCIABILIDAD.

En el caso general.

Sea U un conjunto abierto en R^n y sea $f: A\complement R^n \to R^m$ una función dada. Decimos que f es diferenciable en $x_0 \in U$ si las derivadas de f existen en x_0 y además

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0$$

Donde $T = Df(x_0)$ es la matriz m x n con elementos $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ evaluadas en x_0 y $T(x - x_0)$ es el producto de T por $(x - x_0)$. Llamamos a T la derivada de f en x_0.

Teorema: Sea $f: A\complement R^n \to R^m$ diferenciable en$x_0 \in A$. Entonces f es continua en x_0.

Teorema: Sea $f: U\complement R^n \to R^m$. Supongamos que todas las derivadas parciales $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ de f existen y son continuas en un entorno de un punto $x_0 \in U$. Entonces f es diferenciable en x.

PROPIEDADES DE LA DERIVADA.

i.- Regla de la multiplicación por una constante.

Sea $f: U \subset R^n \rightarrow R^m$ una función diferenciable en x_0 y sea c un numero real. Entonces $h(x) = c.f(x)$ es diferenciable en x_0 y

$$Dh(x_0) = c.Df(x_0)$$

ii.- Regla de la suma.

Sea $h(x) = f(x) + g(x)$

$$Dh(x_0) = Df(x_0) + Dg(x_0)$$

iii.- Regla del producto

Sea $h(x) = f(x).g(x)$

$$Dh(x_0) = g(x_0)Df(x_0) + Dg(x_0)f(x_0)$$

iv.- Regla del cociente.

Sea $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ y suponga que $g(x) \neq 0$

$$Dh(x_0) = \frac{\left(g(x_0)Df(x_0) + f(x_0).Dg(x_0)\right)}{\left(g(x_0)\right)^2}$$

REGLA DE LA CADENA.

Teorema Sea $U_z \subset zR^n\ \ y\ \ V_z \subset zR^m$ conjuntos abiertos. Sean $g: U \subset R^n \rightarrow R^m\ y\ \ f: V \subset R^m \rightarrow R^p$

Funciones tales que g lleva U en V de forma que fog está definida. Supóngase que g es diferenciable en x_0 y que f es diferenciable en $y_0 = g(x_0)$. Entonces fog es diferenciable en x_0 y

$$D(fog)(x_0) = Df(y_0)Dg(x_0)$$

Def. Gradiente.

Si $f: U \subset R^3 \rightarrow R$ es diferenciable, el gradiente de f en (x, y, z) es el vector del espacio dado

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

DERIVADAS DIRECCIONALES

Def: Si $f: R^3 \rightarrow R$, la derivada direccional de f en x según el vector V es

$$\frac{d}{dx} f(x + tV)\Big|_{t=0} \quad si\ existe$$

Teorema: Si $f: R^3 \rightarrow R$ es diferenciable entonces todas la derivadas direccionales existen. La derivada direccional en x en la dirección V es igual a:

$$Df(x)V = grad\ f(x).V = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x)\right] v_1 + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x)\right] v_2 + \left[\frac{\partial f}{\partial z}(x)\right] v_3$$

Donde $V = (v_1, v_2, v_3)$.

Teorema: Sea $f: R^3 \rightarrow R$ una aplicación de clase C^{-1} y sea (x_0, y_0, z_0)un punto de la superficie de nivel S definida por $f(x, y, z) = k$ para una constante k. Entonces $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ es normal a la superficie de nivel en el sentido siguiente:

.- Si V es el vector tangente en t=0 de una trayectoria $c(t)$ en S con $c(0) = (x_0, y_0, z_0)$ entonces $\nabla f(x_0, y_0, z_0).V = 0$

Def: *Plano tangente a superficie de nivel.*

Sea S la superficie que está formada por aquellos (x, y, z) tales que $f(x, y, z) = k$, para k constante. El plano tangente a S en el punto (x_0, y_0, z_0) de S se define por medio de la ecuación

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0).(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

Derivada Parciales Iteradas.

Se llama derivadas parciales iteradas a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \ ; \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \ ; \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \ ; \ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Las derivadas parciales.

Teorema: Si $f(x, y)$ es de clase C^2 (es dos veces diferenciable con continuidad) entonces las derivadas parciales cruzas son

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Teorema de Taylor para varias Variables.

Teorema: *Formula de Taylor 1er Orden.*

Sea $f: U \complement R^n \to R$ diferenciable en $x_0 \in U$. Entonces

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} + R_1(x_0, h)$$

Donde $\frac{R_1(x_0,h)}{\|h\|} \to 0$ cuando $h \to 0$ en R^n

Teorema: *Formula de Taylor 2do Orden*

Sea $f: U \complement R^n \to R$ con derivadas parciales continuas de tercer orden. Entonces

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial y_j} + R_2(x_0, h)$$

MAXIMOS Y MINIMOS LOCALES Y GLOBALES DE n VARIABLES.

Puntos de extremos: Si $f: U \complement R^n \to R$ es una función escalar dada, se dice que un punto$x_0 \in U$ es un "punto de mínimo local" de f si existe un entorno V de x_0 tal que para todos los puntos x de V, $f(x) \geq f(x_0)$. Análogamente, $x_0 \in U$es un punto "de máximo local" si existe un entorno V de x_0 tal que $f(x) \leq f(x_0)$.

El punto $x_0 \in U$ es un "punto de extremo local o relativo" si es un punto de mínimo local o de máximo local. Un punto x_0 es un "punto crítico" de f si, o bien f no es diferenciable en x_0 o bien $Df(x_0) = 0$. Si un punto crítico no es punto de extremo local, se dice que es "punto silla".

CONDICION DE LA DERIVADA 1er PARA PUNTOS DE EXTREMO LOCAL.

Teorema: Si $U \complement R^n$ es abierto, la función $f: U \complement R^n \to R$ es diferenciable y $x_0 \in U$ es un punto de extremo local, entonces $Df(x_0) = 0$, es decir, x_0 es un punto crítico de f.

CRITERIO DE LA DERIVADA 2da PARA PUNTOS DE EXTREMO LOCAL.

Teorema: Si $f: U \complement R^n \to R$ es de clase C^3, $x_0 \in U$ es un punto critico de f y la forma cuadrática hessiana $Hf(x_0)$ es definida positiva entonces x_0 es un punto de mínimo relativo de f. Análogamente $Hf(x_0)$ es definida negativa, entonces, x_0 es un punto de máximo relativo.

Lema: Si $B = [B_{ij}]$ es un matriz real n x n y si la forma cuadrática asociada

$$H: R^n \to R, \qquad (h_1, \dots, h_n) \to \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}.h_i.h_j$$

Es definida positiva, entonces existe una constante $M > 0$ tal que para todo $h \in R^n$

$$H(h) \geq M.\|h\|^2$$

Definición.

Supongamos que $f: U \complement R^n \to R$ tiene derivadas de segundo orden continuas $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial y_i}\right|_{x_0}$ para $i, j = 1, .., n$ en el punto $x_0 \in U$. La HESSIANA de f en x_0 es la forma cuadrática definida por

$$Hf(x_0)(h) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial y_j}(x_0)h_i h_j$$

$$Hf(x_0)(h) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial y_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial y_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial y_n} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

Lema: Sea

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \quad y \;\; H(h) = \frac{1}{3}[h_1, h_2]B\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

Entonces $H(h)$ es definida positiva si y solo si $a > 0$ y $\det(B) = ac - b^2 > 0$

CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA.

Teorema: Sea $f(x, y)$ de clase C^3 en un conjunto abierto $U\ de\ R^2$. Un punto (x_0, y_0) es un punto de mínimo local (estricto) de f si se cumple las tres condiciones:

$$i. - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

$$ii. - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$$

$$iii. - D = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0 \;\; en\ (x_0, y_0)$$

Donde D se conoce como discriminante de la forma cuadrática hessiana. Si en ii.) tenemos <0 en lugar de >0 sin cambiar la condición iii.) entonces tenemos un punto de máximo local.

MAXIMOS Y MINIMOS GLOBALES.

Def: Supóngase qué $f: A \rightarrow B$ es una función definida en un conjunto $A\ de\ R^2\ o\ R^3$. Se dice que un punto $x_0 \in A$ es un punto de máximo absoluto (o de mínimo absoluto) de f si $f(x) \leq f(x_0)\ \ \big(0\ f(x) \geq f(x_0)\big)$ para todo $x \in A$.

Def: Se dice que un conjunto $D \in R^n$ es acotado si existe un número $M > 0$ tal que $\|x\| < M$ para todo $x \in D$. Un conjunto es cerrado si contiene todos los puntos de su frontera.

Teorema: Sea D cerrado y acotado en R^n y sea $f: D \rightarrow R$ continua. Entonces existen puntos $x_0\ y\ x_1$ de D donde f alcanza sus valores máximos y mínimos.

EXTREMOS CONDICIONADOS Y MULTIPLICADORES DE LAGRANGE.

El método de los multiplicadores de LaGrange.

Teorema: Sea $f: U \complement R^n$ y $g: U \complement R^n \rightarrow R$ funciones C^1 con valores reales. Sean $x_0 \in U$ y $g(x_0) = c$ y sea S el conjunto de nivel de g con valor c.

Supongamos que $\nabla g(x_0) \neq 0$

Si $f\ /\ s$, que denota $\langle f\ restringida\ a\ s \rangle$ alcanza en x_0 un máximo o mínimo local en S entonces existe λ tal que

$$\nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0)$$

CRITERIO DE LA DERIVADA SEGUNDA PARA EXTREMOS CONDICIONADOS.

Teorema: Sean $f: U \subset R^2 \to R$ y $g: U \subset R^2 \to R$ funciones suaves (al menos C^2). Sean $V_0 \in U$, $g(V_0) = c$ y sea S la curva de nivel de g correspondiente al valor c. Supongamos que $\nabla g(V_0) \neq 0$ y que existe un numero real λ tal que $\nabla f(V_0) = \lambda \nabla g(V_0)$. Formamos la función auxiliar $h = f - \lambda g$ y el determinante de la matriz hessiana orlada.

$$|\overline{H}| = \begin{vmatrix} 0 & -\dfrac{\partial g}{\partial x} & -\dfrac{\partial g}{\partial y} \\ -\dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} \\ -\dfrac{\partial g}{\partial y} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2} \end{vmatrix} \qquad \textit{evaluada en } V_0$$

$i. -Si\ |\overline{H}| > 0$, entonces V_0 es punto máximo local de f/s

$ii. -Si\ |\overline{H}| < 0$ entonces V_0 es punto mínimo local.

$iii. -Si\ |\overline{H}| = 0$ no es concluyente.

TEORIA MATEMATICAS 5

TEORIA SEGUNDO PARCIAL.

LONGITUD DE ARCO.

Def. La longitud de arco de la trayectoria $c(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$ para $t_0 \leq t \leq t_1$ es

$$L(c) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\, dt$$

Diferencial de la longitud de arco.

Un desplazamiento infinitesimal de una particula que sigue una trayectoria $c(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$ es

$$ds = dxi + dyj + dzk = \left(\frac{dx}{dt}i + \frac{dy}{dt}j + \frac{dz}{dt}k\right)dt$$

Y su longitud

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$$

Es la diferencial de la longitud de arco.

Longitud de arco en $\boldsymbol{R^n}$

Sea $c: [t_0, t_1] \to R^n$ un camino C' a trazos, su longitud se define como

$$L(c) = \int_{t_0}^{t_1} \|C'(t)\| dt$$

El integrando es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las componentes del vector $C'(t)$

Si $c(t) = \big(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\big)$ entonces

$$L(c) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\big(x'_1(t)\big)^2 + \big(x'_2(t)\big)^2 + \cdots + \big(x'_n(t)\big)^2} dt$$

INTEGRAL DE TRAYECTORIA.

Def: La integral de $f(x, y, z)$ a lo largo de la trayectoria c está definida cuando

$c: I = [a, b] \rightarrow R^3$ es de clase C^1 y la función compuesta $t \rightarrow f\big(x(t), y(t), z(t)\big)$ es continua en I. Definimos esta integral por la ecuación.

$$\int_c f ds = \int_a^b f\big(x(t), y(t), z(t)\big)\|c'(t)\|\, dt$$

INTEGRAL DE LINEA

Def: Sea F un campo vectorial en R^3 continuo sobre la trayectoria C' $c: [a, b] \rightarrow R^3$.
Definimos $\int_c Fds$, la integral de línea de F a lo largo de c, por la formula

$$\int_c Fds = \int_a^b F\big(c(t)\big).\, c'(t)dt$$

Es decir, integramos el producto escalar de F con c' sobre el intervalo $[a, b]$.

INTEGRALES DOBLES.

El volumen de la región que esta sobre R y bajo la grafica de una función no negativa f se llama integral doble de f sobre R y se denota por:

$$\iint_R f(x, y)dA = \iint_R f(x, y)dxdy$$

Integrales dobles e iteradas.

$$\iint_R f(x, y)dA = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)dy\right] dx$$

Si usamos planos de corte perpendiculares al eje y, obtenemos

$$\iint_R f(x, y)dA = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)dx\right] dy$$

Esta expresión es la integral iterada que se obtiene integrando respecto a x y después, integrando el resultado respecto a y.

INTEGRALES DOBLE SOBRE UN RECTANGULO.

Def: Si la sucesión $\{S_n\}$ converge a un límite S cuando $n \to \infty$ y si este limite S es el mismo para cualquier elección de puntos c_{jk} en los rectángulos R_{jk}, entonces decimos que f es integrable sobre R y escribimos

$$\iint_R f(x,y)dA = \iint_R f(x,y)dxdy$$

Para designar el límite S.

PROPIEDADES

i.- Linealidad

$$\iint_R \big(f(x,y) + g(x,y)\big)dA = \iint_R f(x,y)dA + \iint_R g(x,y)dA$$

ii.- Homogeneidad

$$\iint_R c.f(x,y)dA = c.\iint_R f(x,y)dA$$

iii.- Monotonia. Si $f(x,y) \geq g(x,y)$ entonces

$$\iint_R f(x,y)dA \geq \iint_R g(x,y)dA$$

TEOREMA DE FUBINI

Sea f una función continua sobre un dominio rectangular $R = [a,b]x[c,d]$. Entonces

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy$$

INTEGRAL DOBLE SOBRE REGIONES ELEMENTALES.

Def. Si D es una región elemental en el plano, elijamos un rectángulo R que contenga a D. Dada una función continua (y, por tanto, acotada) $f: D \to R$ definimos $\iint_D f(x,y)dA$, la integral de f sobre el conjunto D, como sigue: extendemos f a una función f^* definida sobre R como

$$f^* = \begin{cases} f(x,y) \;\; si\ (x,y) \in D \\ 0 \quad si\ (x,y) \notin D y\ (x,y) \in R \end{cases}$$

Nótese que f^* es acotada (ya que f lo es) y continua excepto posiblemente en la frontera de D. La frontera de D está formada por graficas de funciones continuas, de modo que f^* es integrable sobre R:

$$\iint_D f(x,y)dA = \iint_R f^*(x,y)dA$$

REDUCCION DE LAS INTEGRALES ITERADAS.

Si D es una región y-simple, como se muestra en la figura, entonces

$$\iint_D f(x,y)dA = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dydx$$

INTEGRAL ITERADA PARA REGIONES X-SIMPLES.

Supongamos que D es el conjunto de los puntos (x,y) tales que $y \in (a,b)$ y $\psi 1 \leq x \leq \psi 2$. Si f es continua en D, entonces

$$\iint_D f(x,y)dA = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dxdy$$

CAMBIO DEL ORDEN DE INTEGRACION.

Supongamos que D es una región simple (es decir, x-simples, y-simple). Entonces, se puede expresar como el conjunto de los puntos (x,y) tales que

$$a \leq x \leq b \qquad \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$$

Y también como el conjunto de los puntos (x,y) tales que

$$c \leq y \leq d \qquad \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)$$

Por consiguiente tenemos las formulas

$$\iint_D f(x,y)dA = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dydx = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dxdy$$

TEOREMA DE VALOR MEDIO PARA INTEGRALES DOBLES.

Supongamos que $f: D \to R$ es continua y D es una región elemental. Entonces para algún punto (x_0, y_0) en D se tiene

$$\iint_D f(x,y)dA = f(x_0,y_0)A(D)$$

Donde A(D) denota el area de D.

CAMBIO DE VARIABLES.

Determinantes jacobianos.

Definicion: Sea $T: D^* \subset R^2 \to R^2$ una transformación de clase C^1 dada por $x = x(u,v)$ y $y = y(u,v)$. El determinante jacobiano de T que se escribe $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ es el determinante de $DT(u,v)$ la matriz derivada de T

$$jacobiano \quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

CAMBIO DE VARIABLE.

Sean D y D^* regiones elementales del plano y sea $T: D^* \to D$ de clase C^1, supóngase que T es inyectiva. Además, supóngase que $D = T(D^*)$. Entonces para cualquier función integrable

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D^*} f\big(x(u,v), y(u,v)\big) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

Algunos cambios de variable.

Coordenadas Polares

Sea $x = r\cos(\varphi) \quad y \quad y = r\sin(\varphi)$ se tiene que: jacobiano $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = r$ por lo cual

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D^*} f(r\,co(\varphi), r\sin(\varphi))r\,dr\,d\varphi$$

TEOREMA DE GREEN.

Teorema: Sea D una región simple y sea C su frontera. Supongamos que $P: D \to R$ y $Q: D \to R$ son clase C^1. Entonces.

$$\int_{C^+} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

NOTA. La orientación correcta para la curva frontera de D se puede recordar usando el siguiente truco, si caminamos alrededor de la curva C, la región D debe estar a nuestra izquierda.

INTEGRALES TRIPLES.

Definición. Sea f una función acotada de tres variables definidas en B. Si $\lim_{n\to\infty} Sn = S$ existe y es independiente de la elección de c_{ijk}, decimos que f es integrable y llamamos a S su integral triple de f en B y la denotamos por

$$\iiint_B f\, dV \quad \text{ó} \quad \iiint_B f(x,y,z)dV \quad \text{ó} \quad \iiint_B f(x,y,z)dxdydz$$

Integrales triple mediante integración iterada.

Supongamos que W es una región elemental en la que z se mueve entre dos funciones de x e y. entonces

$$\iiint_W f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \int_{\alpha_1(x)}^{\alpha_2(x)} \int_{\delta_1(x,y)}^{\delta_2(x,y)} f(x,y,z)dzdydx$$

FORMULA DEL CAMBIO DE VARIABLES PARA INTEGRALES TRIPLES.

Definición. Sea $T: W \complement R^3 \to R^2$ una función C^1 definida por las ecuaciones $x = x(u,v,w)$; $y = y(u,v,w)$; $z = z(u,v,w)$. Entonces el jacobiano de T que se denota por

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

COORDENADAS CILINDRICAS.

Sea: $x = r\cos(\theta)$ $y = r\sin(\theta)$ $z = z$ el jacobiano será r.

$$\iiint_W f(x, y, z)dxdydz = \iiint_{W^*} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta), z)r\, drd\theta dz$$

COORDENADAS ESFERICAS.

Sea $x = \rho\sin(\theta)\cos(\vartheta)$ $y = \rho\sin(\theta)\cos(\vartheta)$ $z = \rho\cos(\theta)$

Jacobiano será $\rho^2\sin(\theta)$

$$\iiint_W f(x, y, z)dxdydz$$
$$= \iiint_{W^*} f(\rho\sin(\theta)\cos(\vartheta), \rho\sin(\theta)\cos(\vartheta), \rho\cos(\theta))\rho^2\sin(\theta)\, d\rho d\theta d\vartheta$$